Translation of Fun with Dot Sheets :
From Azim premji University At Right Angles_July,2018

बिन्दुकित कागज़ों के साथ मज़ेदार गतिविधियाँ

इस लेख में हम बिन्दुकित कागज़ों (dot sheets) के साथ खोजबीन पर ध्यान केन्द्रित करेंगे। पृष्ठ 1 और 2 विद्यार्थियों के लिए वर्कशीट हैं, पृष्ठ 3 और 4 में सुगमकर्ता के लिए दिशा-निर्देश हैं।

याद रखें : जब भी कोई रेखा खींचनी हो, तो दो ग्रिड बिन्दु लेने होंगे जिनसे होकर यह रेखा गुज़रती हो।

1. कोण

- वर्गाकार ग्रिड पर : दो आसन्न बिन्दु (adjacent dots) लें और उन्हें जोड़ते हुए एक रेखाखण्ड खींचें। चाँदे का उपयोग किए बिना रेखाखण्ड के किसी भी सिरे पर निम्नलिखित कोण बनाएँ : 45°, 135°, 225°
- समदूरीक (isometric grid) ग्रिड पर : दो आसन्न बिन्दु लें और उन्हें जोड़ते हुए एक रेखाखण्ड खींचें। रेखाखण्ड के किसी भी सिरे पर दिए गए कोण बनाएँ : 30°, 60°, 90°, 120°, 150°, 210°

2. संरेख बिन्दु (Collinear points)

- कोई भी दो बिन्दु लें। एक तीसरा बिन्दु खोजें जो इनके साथ संरेख हो।
- स्केल की मदद से इनकी संरेखता की जाँच करें। क्या आप इनकी संरेखता को सिद्ध कर सकते हैं? कैसे?
- वर्गाकार ग्रिड और समदूरीक ग्रिड दोनों पर बिन्दुओं के अन्य युग्मों के साथ इसे दोहराएँ।

3. इन आयतों और वर्गों को पूरा करें (पृष्ठ 3 पर चित्र-अ देखें)

- आपको एक आयत की दो भुजाएँ दी गई हैं। क्या आप इसे पूरा कर सकते हैं?
- आपको एक वर्ग की एक भुजा दी गई है। क्या आप इसे पूरा कर सकते हैं? क्या इस रेखा का उपयोग करके आप केवल एक ही वर्ग बना सकते हैं?
- यदि आपको एक भुजा दी गई हो, तो क्या आप समदूरीक ग्रिड पर एक वर्ग बना सकते हैं? क्यों?

4. समान्तर रेखाएँ (Parallel lines)

- थोड़ी दूरी पर स्थित कोई भी दो बिन्दु लें। इन्हें जोड़ते हुए एक रेखा खींचें। एक तीसरा बिन्दु लें जो खींची गई रेखा पर न हो।
- एक और रेखा खींचें जो तीसरे बिन्दु से होकर जाए और पहली रेखा के समान्तर हो।

- सिद्ध करें कि ये दोनों रेखाएँ समान्तर हैं।

5. लम्ब रेखाएँ (Perpendicular lines)

तरीक़ा 1	तरीक़ा 2
थोड़ी दूरी पर स्थित कोई भी दो बिन्दु लें। इन्हें जोड़ते हुए एक रेखा खींचें और खींची गई रेखा पर एक तीसरा बिन्दु चुनें। एक और रेखा खींचें जो तीसरे बिन्दु से होकर जाए और पहली रेखा पर लम्ब हो। जाँचें कि यह एक-दूसरे पर लम्ब हैं। बताएँ कि कैसे?	थोड़ी दूरी पर स्थित कोई भी दो बिन्दु लें। इन्हें जोड़ते हुए एक रेखा खींचें और एक तीसरा बिन्दु चुनें जो खींची गई रेखा पर न हो। एक और रेखा खींचें जो तीसरे बिन्दु से होकर जाए और पहली रेखा पर लम्ब हो। जाँचें कि यह एक-दूसरे पर लम्ब हैं। बताएँ कि कैसे?

6. प्रतिबिम्ब (Reflection)

तरीक़ा 1	तरीक़ा 2
एक क्षैतिज या ऊर्ध्वाधर रेखा (दर्पण रेखा) खींचें और इसके एक तरफ़ एक विषमबाहु त्रिभुज बनाएँ। इस रेखा पर त्रिभुज का प्रतिबिम्ब बनाएँ।	ऐसी दर्पण रेखा का प्रयोग करें जो न तो क्षैतिज हो, और न ही ऊर्ध्वाधर।

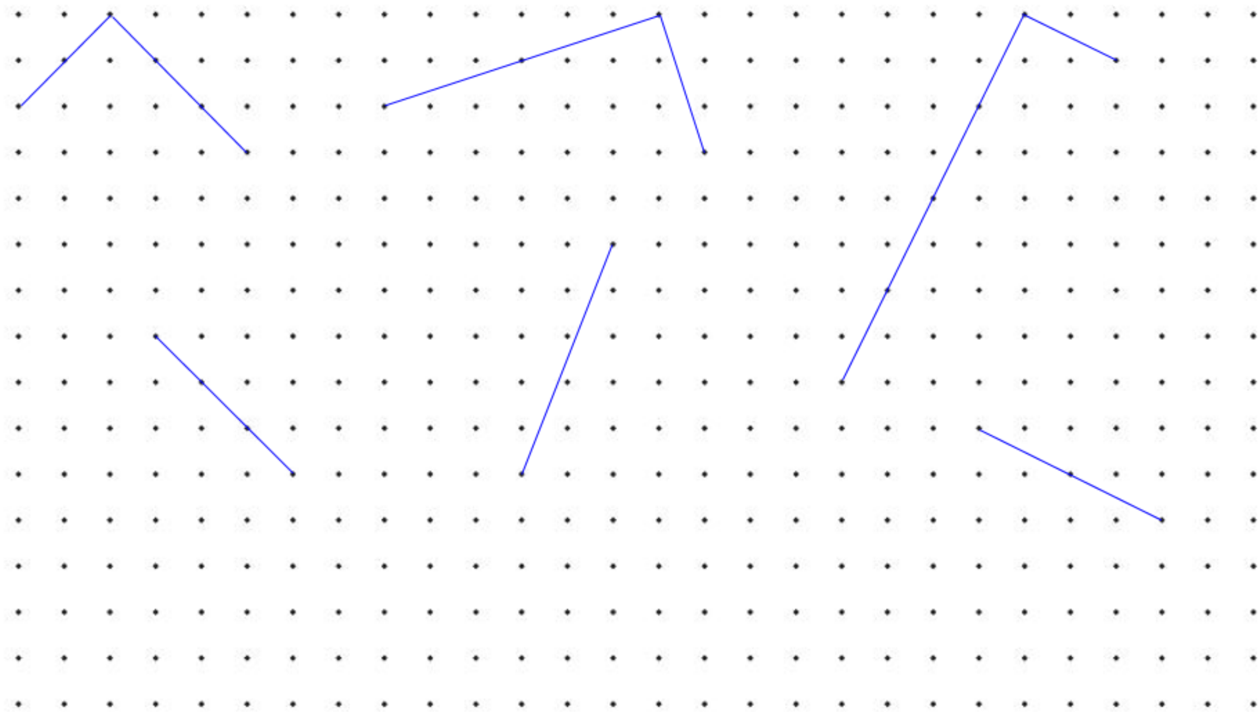
7. घूर्णन (Rotation) : कागज़ के बीच में एक बिन्दु लें और एक विषमबाहु त्रिभुज बनाएँ।

वर्गाकार ग्रिड	समदूरीक ग्रिड
त्रिभुज को घड़ी की सुई की विपरीत दिशा में 90° और फिर 180° पर घुमाएँ।	त्रिभुज को घड़ी की सुई की विपरीत दिशा में 60° और फिर 120° पर घुमाएँ।

8. दोहरा प्रतिबिम्ब (Double reflections) (पृष्ठ 3 के चित्र देखें)

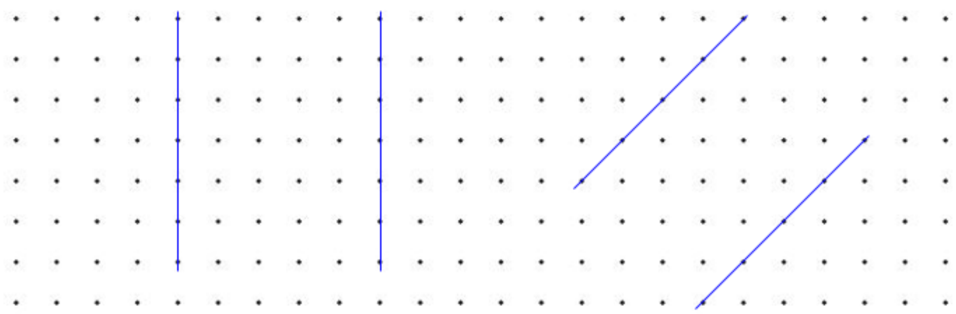
समान्तर रेखाओं पर	प्रतिच्छेदी रेखाओं पर
दर्पण रेखाएँ क्षैतिज या ऊर्ध्वाधर ग्रिड रेखाओं की एक जोड़ी हो (चित्र ब)। दर्पण रेखाएँ (45°) तिरछी समान्तर रेखाओं की एक जोड़ी हो (चित्र ब)।	वर्गाकार ग्रिड पर : दर्पण रेखाएँ 45° या 90° पर प्रतिच्छेद करती हों (चित्र स)। समदूरीक ग्रिड पर : दर्पण रेखाएँ 30° या 60° पर प्रतिच्छेद करती हों (चित्र द)।

आयतों (2 भुजाएँ दी गई हैं) और वर्गों (1 भुजा दी गई है) को पूरा करें।

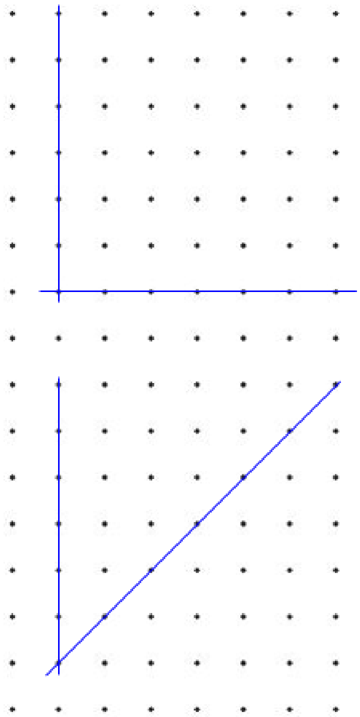


चित्र-अ

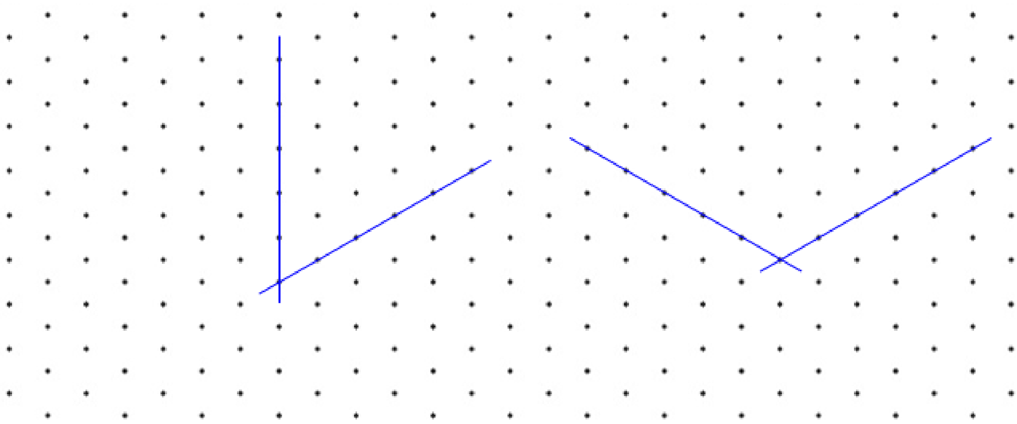
दोहरे प्रतिबिम्ब के लिए दर्पण रेखाओं की जोड़ियों के लिए निम्नलिखित उदाहरणों का प्रयोग करें :



चित्र-ब : वर्गाकार बिन्दुकित काग़ज़ में समान्तर दर्पण रेखाएँ



चित्र-स : वर्गाकार बिन्दुकित काग़ज़ में प्रतिच्छेदी दर्पण रेखाएँ

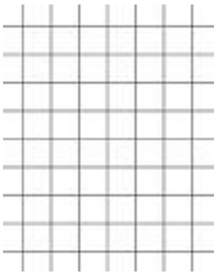


चित्र-द : समदूरीक बिन्दुकित काग़ज़ में प्रतिच्छेदी दर्पण रेखाएँ

वर्गाकार ग्रिड और बिन्दुकित काग़ज़ पर स्थानिक (spatial) समझ और ज्यामिति की पड़ताल

निम्नलिखित गतिविधियाँ वर्गाकार ग्रिड (**चित्र-1**) और आयताकार बिन्दुकित काग़ज़ (**चित्र-2**) पर की जा सकती हैं। यह उच्च कक्षाओं में कार्तीय-तल (Cartesian plane) की पुख़्ता समझ का मार्ग प्रशस्त करती हैं। इसके आगे के हिस्से में लाइनों वाली वास्तविक वर्गाकार ग्रिड और आयताकार बिन्दुकित काग़ज़ दोनों को वर्गाकार ग्रिड द्वारा प्रस्तुत किया जाएगा। [नोटबुक की वर्गाकार ग्रिड की तुलना में आयताकार बिन्दुकित काग़ज़ का फ़ायदा यह है कि इनमें कोई रेखा नहीं होती।]

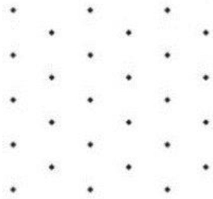
सामान्यत: आप इनमें से किसी भी गतिविधि को पहले वर्गाकार ग्रिड पर कर सकते हैं। बाद में, एक चुनौती के रूप में इन्हें समदूरीक ग्रिड (**चित्र-3**) पर आज़माया जाना चाहिए। कुछ गतिविधियाँ केवल समदूरीक ग्रिड पर ही की जानी चाहिए, जैसा कि नीचे बताया गया है।



चित्र-1



चित्र-2



चित्र-3

बिन्दुकित काग़ज़ के अलावा आवश्यक सामग्री है– स्केल, पेंसिल, रबर और शार्पनर। चाँदा रखना भी मददगार हो सकता है, लेकिन इसकी ज़रूरत केवल जाँचने के लिए होगी। जब भी कोई रेखा खींचनी हो तो दो ग्रिड बिन्दु चुने जाने चाहिए जिनसे होकर यह रेखा गुज़रती है।

गतिविधियाँ मोटे तौर पर दो प्रकार की हैं–

अ. दी गई रेखा के समान्तर रेखाएँ खींचना या दी गई रेखा पर किसी दिए गए कोण पर झुकी हुई रेखाएँ खींचना

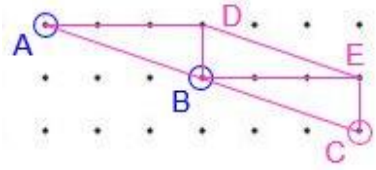
आ. आकृतियों को प्रतिबिम्बित करना और घुमाना

इन गतिविधियों की मदद से जिन विषयों का परिचय या अभ्यास कराया जा सकता है, वे हैं– 'प्रारम्भिक आकारों को समझना'(कक्षा 6, एनसीईआरटी पाठ्यचर्या) और 'सममिति' (कक्षा 7, एनसीईआरटी पाठ्यचर्या)। हालाँकि, कुशल शिक्षण से विद्यार्थी इन विषयों से आगे बढ़कर भी बहुत कुछ सीख सकते हैं। ये गतिविधियाँ कक्षा 5-8 के साथ की जा सकती हैं; जवाबों का स्तर निश्चित रूप से इस पर निर्भर करेगा कि विद्यार्थी किन विषयों से परिचित हैं। ज़्यादातर स्थितियों में, विद्यार्थियों को अपने उत्तरों को सिद्ध करने के लिए कहा गया है। इससे उन्हें अपने गणितीय विचार (mathematical reasoning) विकसित करने में मदद मिलेगी। इससे शिक्षकों को गणितीय अवधारणाओं की गहन समझ विकसित करने में बच्चों की सहायता करने का अवसर भी मिलता है।

इन सभी चित्रों में 'जो दिया गया है' उसके लिए *नीला* रंग और 'जो विद्यार्थियों को खोजना है' उसके लिए *गुलाबी* रंग का इस्तेमाल किया गया है।

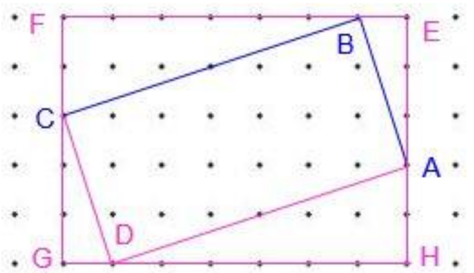
1. **कोण** : इन कोणों को बनाने के लिए बिन्दुकित काग़ज़ों की विशेषताओं का उपयोग किया जाना चाहिए। बच्चों को सम्बन्धित बिन्दुकित काग़ज़ों में वर्ग और समबाहुत्रिभुज की टाइलिंग को पहचानने में सक्षम होना चाहिए। इन समबहुभुजों (regular polygons) के कोणों का उपयोग करके उन्हें 90° और 60° के कोणों की मौजूदगी को सिद्ध करने में सक्षम होना

चाहिए। इन्हें आधा करने से क्रमश: 45° और 30° प्राप्त होंगे, जिन्हें पहले के कोणों के साथ मिलाकर बाक़ी कोण प्राप्त किए जा सकते हैं।



चित्र-4

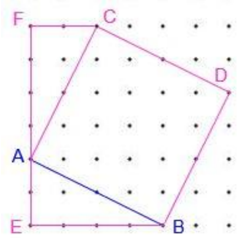
2. **संरेख बिन्दु :** यदि दो क्रमागत ग्रिड बिन्दु चुने गए हैं, तो तीसरा बिन्दु खोजना बहुत ही आसान होगा। इसलिए बिन्दुओं को चुनते समय यह ध्यान रखना चाहिए कि वे थोड़े दूर-दूर हों और एक ही ग्रिड रेखा पर न हों। तीसरा संरेख बिन्दु खोजने का सबसे आसान तरीक़ा है पहले बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक के पथ की नक़ल करते हुए दूसरे बिन्दु से तीसरे बिन्दु तक जाना। उदाहरण के लिए, **चित्र-4** में दिए गए बिन्दु A और B हैं। A से B और B से C का रास्ता तय करने के लिए हमें '3 ख़ाने दाएँ और 1 ख़ाने नीचे' जाना है। यह सिद्ध करने के लिए कि A, B और C संरेख हैं, यह देखते हुए कि ΔABD, ΔEDB और ΔBCE सर्वांगसम हैं (क्यों?) और त्रिभुज के कोणों के योग गुणधर्म (angle sum property of a triangle) का उपयोग करके हम यह दिखा सकते हैं कि $\angle ABC = 180°$। यह '3 ख़ाने दाएँ और 1 ख़ाने नीचे' जाना '*रन और राइज़*' की शुरुआत करता है जिसका भागफल (यानी, *राइज़ ओवर रन*) रेखा की ढलान है। बच्चों को इन्हें देखकर अनुमान लगाने और इन्हें दुगुना, यानी कि 6 ख़ाने दाएँ और 2 ख़ाने नीचे, तिगुना आदि करने में सक्षम होना चाहिए। यदि दिए गए *रन और राइज़* सह-अभाज्य (co-prime) नहीं हैं, तो बच्चे रेखाखण्ड AB के भीतर ग्रिड बिन्दु पहचान पाएँगे।



चित्र-5

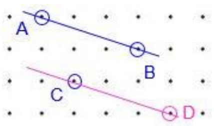
3. **आयतों और वर्गों को पूरा करें** : जब भी दी गई भुजाएँ 45° तिरछी हों, तो ऐसा करना आसान होता है क्योंकि दर्पण प्रतिबिम्ब का उपयोग किया जा सकता है। बाक़ी स्थितियों के लिए इसे सर्वांगसम समकोण त्रिभुजों की सहायता से सिद्ध किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, **चित्र- 5** में C से D तक जाने के लिए वैसा ही रास्ता अपनाया गया है जैसा कि B से A तक जाने के लिए अपनाया गया था। इसके परिणामस्वरूप $\Delta ABE \cong \Delta CDG$ मिलता है। तो $AB = CD$ और इसी तरह $BC = AD$ यानी ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है जिसमें $\angle B = 90°$ (दिया गया है), जो इसे एक आयत बनाता है। वर्ग के लिए, समकोण

बनाने की आवश्यकता होती है और यह दी गई रेखा के दोनों ओर बनाया जा सकता है। उदाहरण के लिए, **चित्र-6** में A से B का रास्ता : 2 ख़ाने नीचे 4 ख़ाने दाएँ, से बदलकर A से C के लिए 4 ख़ाने ऊपर 2 ख़ाने दाएँ हो जाता है। परिणामस्वरूप ΔABE का घूर्णन उसे ΔCAF की जगह पर ले जाता है और लम्बवत रेखाओं की ढलानों के लिए m · m' = -1 देता है।

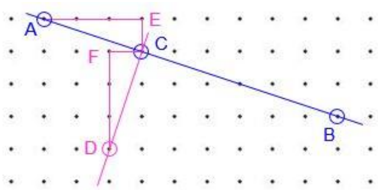


चित्र-6

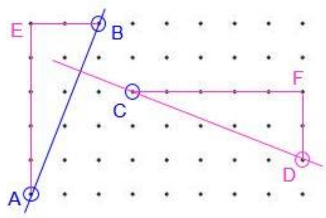
4. समान्तर रेखाएँ : एक बार फिर इसे करने का सबसे आसान तरीक़ा है A से B तक के पथ का अनुसरण करना और C से D तक जाने के लिए इसकी नक़ल करना। परिणामस्वरूप $AB = CD$ और $AB \parallel CD$होता है। इसे B से D तक जाने के लिए A से C के पथ यानी कि 2 ख़ाने नीचे 1 ख़ाने दाएँ की नक़ल करके भी प्राप्त किया जा सकता है, जैसा कि **चित्र-7** में दिखाया गया है। दोनों को स्थानान्तरण के रूप में देखा जा सकता है, जिससे समान्तर रेखाएँ प्राप्त होती हैं।



चित्र-7



चित्र-8



चित्र-9

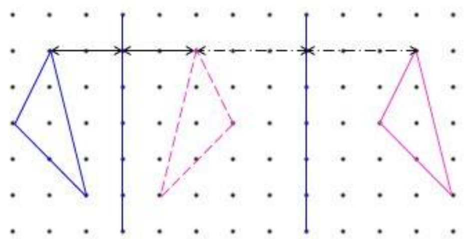
5. लम्ब रेखाएँ : इसका लब्बोलुआब एक समकोण त्रिभुज को 90° से घुमाना है। उदाहरण के लिए, चित्र 8 में ΔACE को घुमाने से ΔDCF प्राप्त होता है, जबकि **चित्र-9** में ΔABE को घुमाने से ΔCDF प्राप्त होता है। दोनों परिवर्तनों में *रन और राइज़* और ऊपर और नीचे की अदला-बदली शामिल है।

6. प्रतिबिम्ब : त्रिभुजों (या किसी भी अन्य आकृति) को प्रतिबिम्बित करने के प्रीकर्सर के रूप में बच्चों को पहले बिन्दुओं को एक रेखा पर प्रतिबिम्बित करके देखना चाहिए। यदि वे प्रतिबिम्ब के गुणधर्मों को समझते हैं, तो सिर्फ़ देखकर अनुमान लगाना काफ़ी होना चाहिए। विशेष तौर पर, यदि A' रेखा PQ पर A की प्रतिबिम्बित छवि है, तो PQ, AA' का लम्ब समद्विभाजक है। अत: त्रिभुज को प्रतिबिम्बित करने के लिए उसके प्रत्येक शीर्ष को प्रतिबिम्बित करना होता है। विषमबाहु त्रिभुज यह पहचानने में मदद करते हैं कि कौन-सा शीर्ष किस पर प्रतिबिम्बित हुआ।

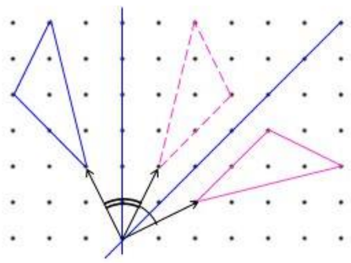
इस गतिविधि के बाद प्रतिबिम्बित करने के विभिन्न गुणधर्मों पर चर्चा की जा सकती है और की जानी चाहिए। इसमें अभिमुख (orientation) में परिवर्तन, प्रतिबिम्बित आकृति और पूर्व-प्रतिबिम्बित आकृति की सर्वांगसमता के साथ-साथ प्रतिबिम्बित आकृति और पूर्व-प्रतिबिम्बित आकृति का दर्पण रेखा से समान दूरी पर होना शामिल है। तरीक़ा 2 के लिए : दर्पण रेखा वर्ग ग्रिड पर बनी ग्रिड रेखाओं के साथ 45° पर और समदूरीक ग्रिड पर 30° पर हो सकती है।

7. घूर्णन : इसी तरह, पहले एक बिन्दु को दूसरे बिन्दु के चारों ओर घुमाने के प्रयास किए जाने चाहिए। बच्चों को सिर्फ़ देखकर अनुमान लगाने और यह समझने में सक्षम होना चाहिए कि यदि A' किसी बिन्दु A की घुमाई गई छवि है जिसे θ कोण से दूसरे बिन्दु O के सापेक्ष घुमाया गया है तो $\angle AOA' = \theta$। घूर्णन के विभिन्न गुणधर्मों पर चर्चा की जा सकती है और की जानी चाहिए, विशेष रूप से इस गुणधर्म की कि अभिमुख समान रहता है।

8. दोहरा प्रतिबिम्ब : यह देखने के लिए ये एक मज़ेदार अभ्यास है कि समान्तर रेखाओं पर दोहरे प्रतिबिम्ब बनाने का परिणाम महज़ स्थानान्तरण होता है, जबकि प्रतिच्छेदी रेखाओं में इससे घूर्णन उत्पन्न होता है। इसके अलावा, यह ध्यान देने योग्य है कि आकृति और स्थानान्तरण-पूर्व आकृति के बीच की दूरी समान्तर दर्पण रेखाओं (**चित्र-10**) के बीच की लम्बवत दूरी से दोगुनी है। इस बात को दोनों के बीच की आकृति की मदद से आसानी से सिद्ध किया जा सकता है। इसी प्रकार यह भी देखा जा सकता है कि घूर्णन कोण प्रतिच्छेदी दर्पण रेखाओं के बीच के कोण का दोगुना है। इसे सिद्ध करने के लिए फिर से दोनों के बीच की आकृति (**चित्र-11**) का उपयोग करना होगा।



चित्र-10



चित्र-11

अनुवाद : प्रमोद मैथिल
पुनरीक्षण : हृदय कान्त दीवान
कॉपी एडीटिंग : कविता तिवारी
सम्पादन : राजेश उत्साही